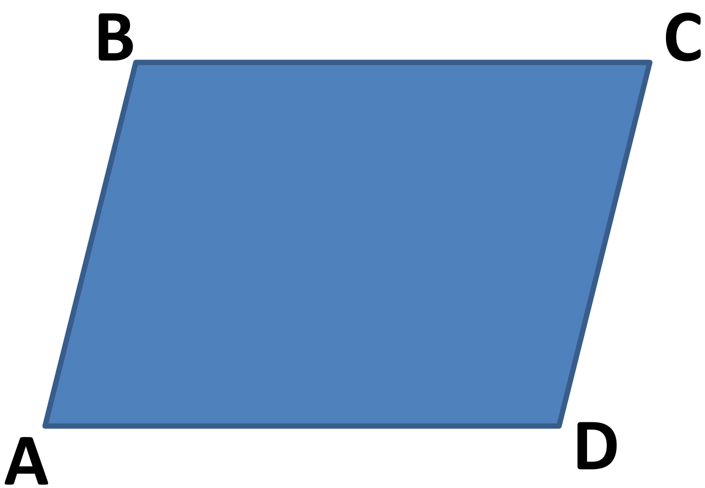
Паралелограм і його властивості

Означення

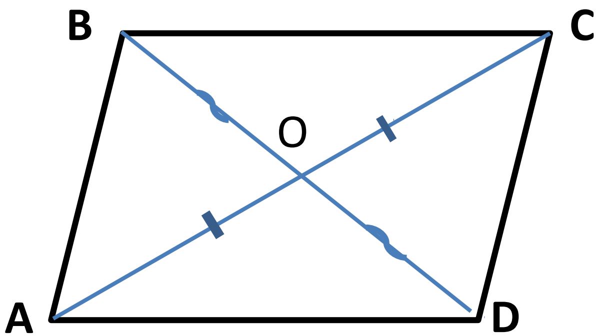


AB || CD   BC || AD

Паралелограмом називають чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.

Термін ***«паралелограм»*** *походить від грецьких слів* ***«паралелос»*** *– той, що йде поруч, паралельний, і* ***«грамма»*** *- лінія.*

Ознаки паралелограма



Теорема 1. **Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються та діляться точкою перетину навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.**

Доведення

На рисунку зображено чотирикутник ABCD у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O, причому AO=OC і BO=OD. Доведемо, що даний чотирикутник – паралелограм.

Оскільки кути AOD і BOC рівні як вертикальні, AO=OC і BO=OD, то трикутники AOD і COB рівні за першою ознакою рівності трикутників.

З рівності трикутників випливає, що кути BCO і DAO рівні. Ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих BC і AD і січній AC, отже, AD || BC.

Аналогічно, з рівності трикутників AOB COD випливає рівність кутів BAO і DCO, а отже, AB || DC.

Протилежні сторони чотирикутника ABCD паралельні, отже, ABCD – паралелограм за означенням.

Ознаки паралелограма

Теорема 2. Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Теорема 3. Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Теорема 4. Якщо протилежні кути чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.

Теорема 5. Якщо сума кутів, прилеглих до будь якої сторони чотирикутника, дорівнює 180°, то цей чотирикутник – паралелограм.

Властивості паралелограма

ABCD – паралелограм,

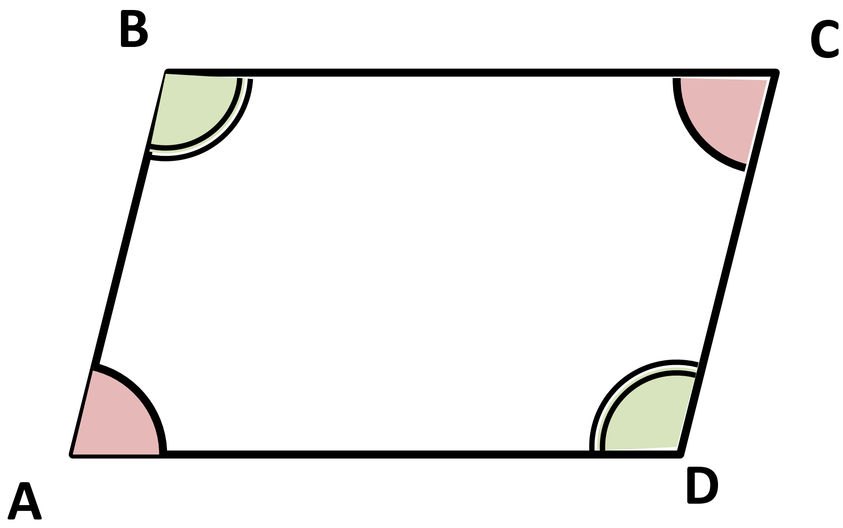
AB || CD, AD || BC,

AB = CD, AD = DC.

У паралелограма протилежні сторони попарно паралельні.

У паралелограма протилежні сторони попарно рівні.

Властивості паралелограма

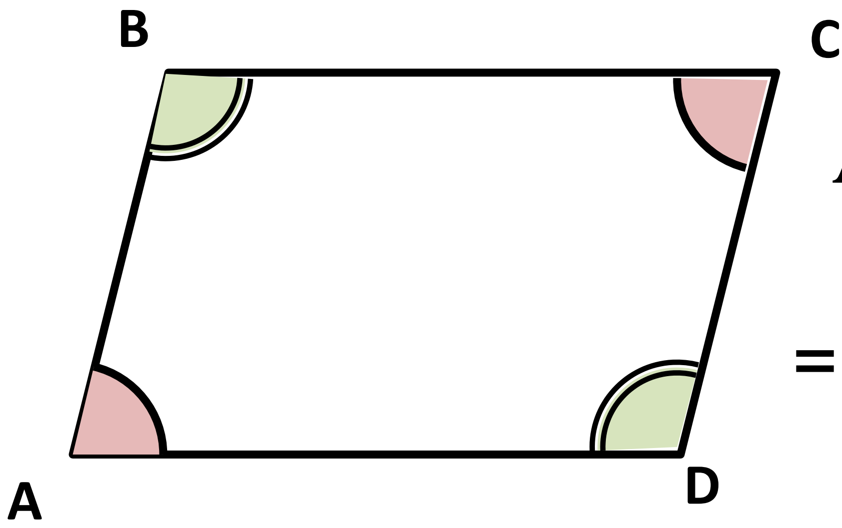


ABCD – паралелограм,

$\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$.

У паралелограма протилежні кути рівні.

Властивості паралелограма

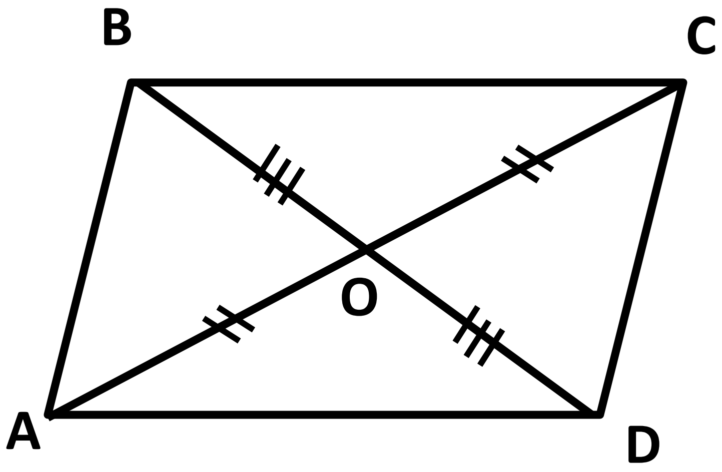


ABCD –паралелограм,

$$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$$
$$= \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180°.$$

Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180°.

Властивості паралелограма



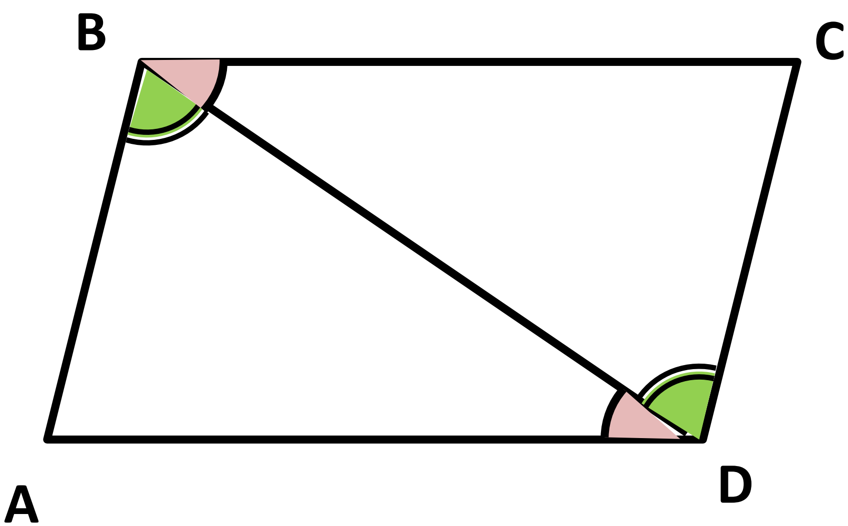
ABCD –

паралелограм,

AO = OC, BO = OD.

Діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл.

Властивості паралелограма



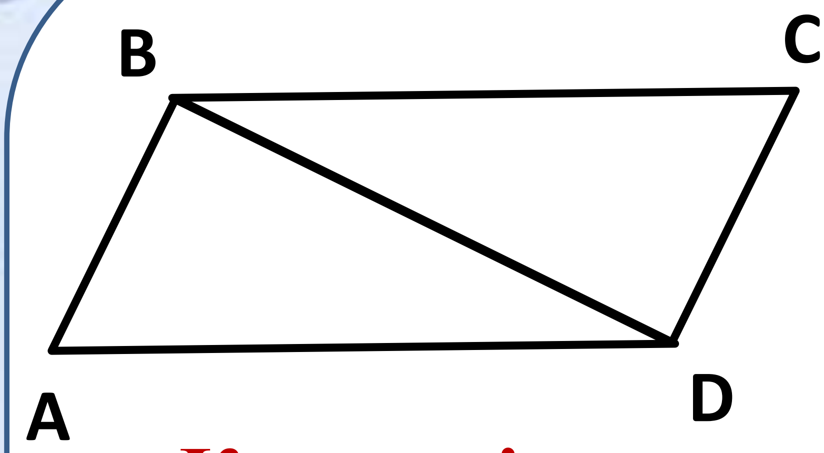
ABCD-паралелограм,

$\angle ABD = \angle BDC$,

$\angle ADB = \angle CBD$.

Кожна діагональ утворює з протилежними (паралельними) сторонами дві пари рівних («внутрішніх різносторонніх») кутів.

Властивості паралелограма



ABCD – паралелограм;

Δ ABD = ΔCDB.

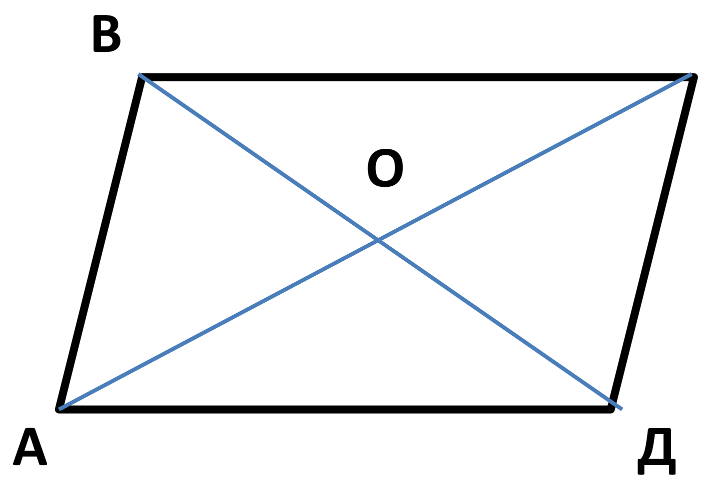
Кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівних трикутники.

Доведення

Нехай ABCD – даний паралелограм, BD – діагональ паралелограма.

Розглянемо трикутники ABD і CDB. У них AB=CD, AD=BC, як протилежні сторони паралелограма, BD – спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

Властивості паралелограма



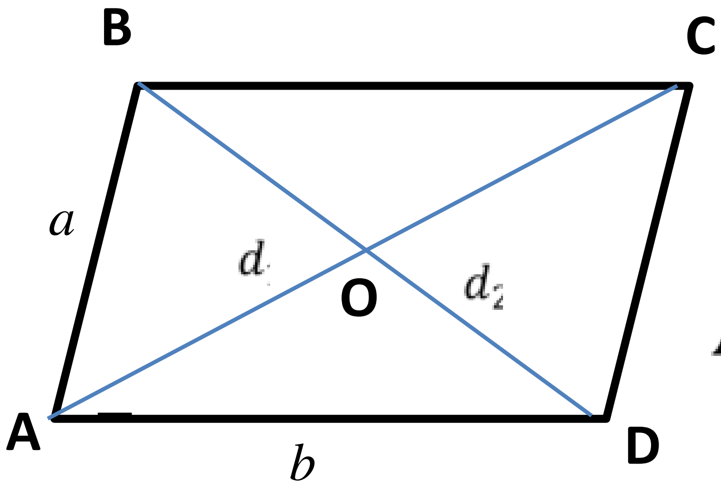
ABCD – паралелограм,

$$|BC - AB| < AC < BC + AB,$$

$$|BC - CD| < BD < BC + CD.$$

Довжина кожної з діагоналей менша за суму
довжин його не паралельних.
сторін та більша за модуль різниці довжин
зазначених сторін.

Властивості паралелограма



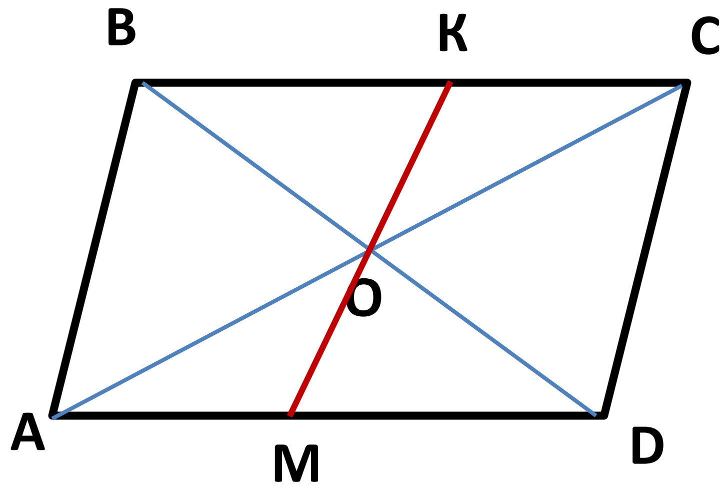
ABCD – паралелограм,

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2),$$

$$d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх сторін паралелограма.

Властивості паралелограма

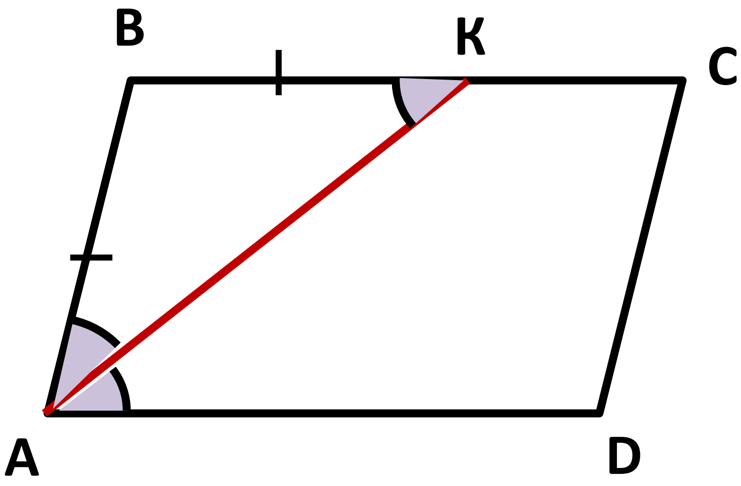


**ABCD – паралелограм,
О-точка перетину
діагоналей АС і ВД,
О - центр симетрії
паралелограма,
ОК = ОМ.**

Точка перетину діагоналей є центром симетрії паралелограма.

Будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей і кінці якого належать паралельним його сторонам, ділиться цією точкою навпіл.

Властивості паралелограма



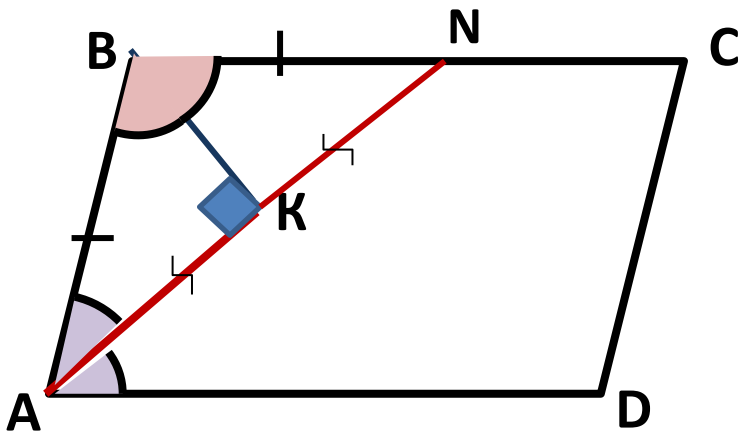
ABCD – паралелограм

AB – бісектриса, то

AB = BK.

Бісектриса кута паралелограма перетинає більшу з його сторін і відтинає від паралелограма рівнобедрений трикутник, основою якого є ця бісектриса.

Властивості паралелограма



ABCD – паралелограм,

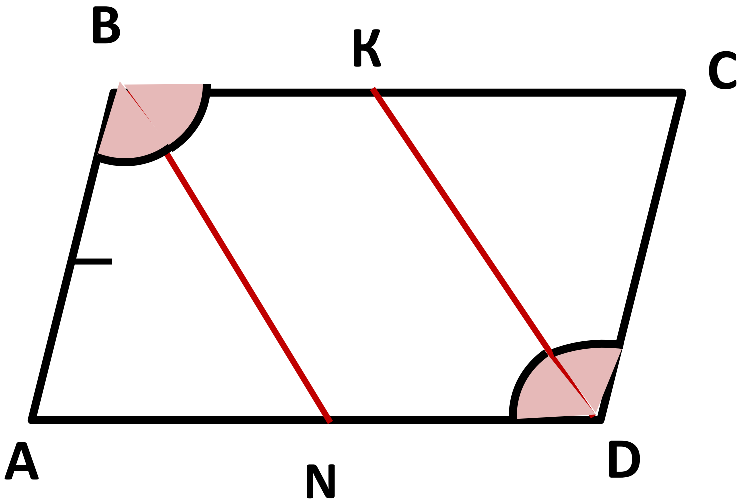
AK, BK – бісектриси,

$\angle$BKA=90°, AK = KN.

Бісектриси внутрішніх (зовнішніх) кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, утворюють прямий кут.

Бісектриси внутрішніх кутів, прилеглих до меншої сторони, точкою перетину діляться навпіл.

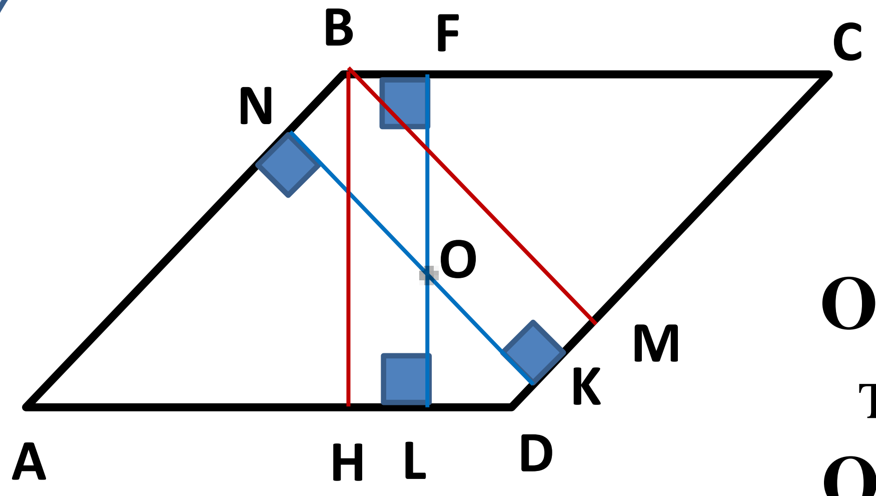
Властивості паралелограма



ABCD – паралелограм,
BN – бісектриса ∠B,
KD- бісектриса ∠D,
то BN || DK.

Бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні або належать одній прямій.

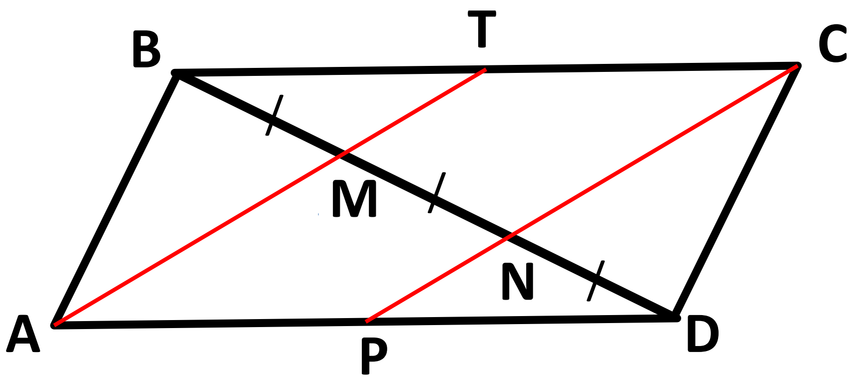
Властивості паралелограма



O- будь-яка точка всередині ABCD
OF,OK,ON,OL-відстані від точки O до сторін ABCD
OF+OK+ON+OL=BH+BM.

Сума відстаней від будь-якої точки всередині паралелограма до його сторін є величиною сталою (та дорівнює сумі довжин його висот).

Властивості паралелограма



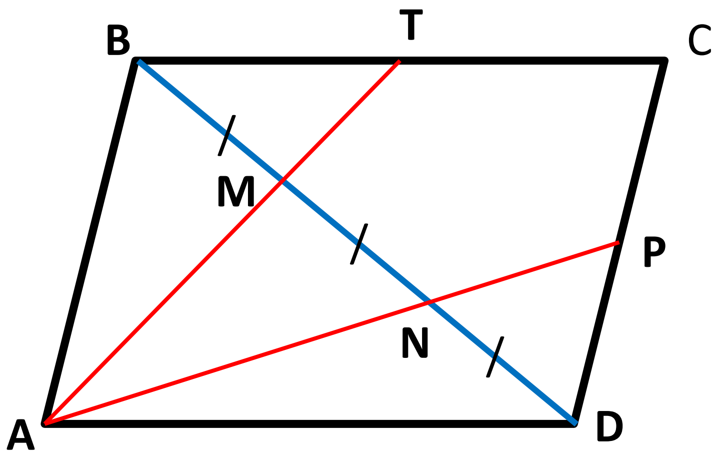
ABCD – паралелограм,

BT=TC, AP=PD,

BM=MN=ND.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини із серединами паралельних сторін, ділять відповідну діагональ на три відрізки однакової довжини

Властивості паралелограма



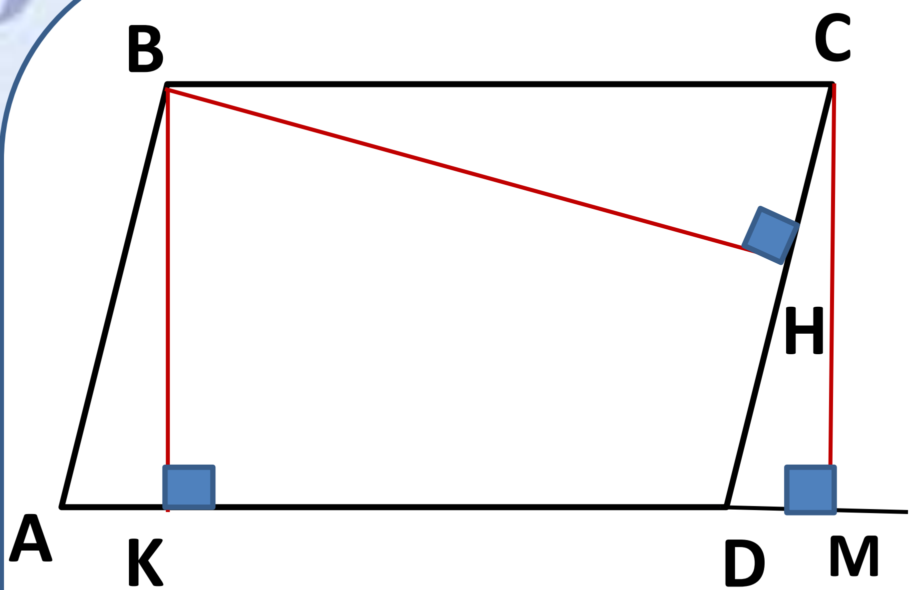
ABCD - паралелограм,

BT=TC, CP=PD,

BM=MN=ND.

Відрізки, які сполучають певну вершину із серединами несуміжних сторін, ділять відповідну діагональ на три відрізки однакової довжини

Висота паралелограма



Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений із точки прямої,що містить сторону паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

CM, BK і BH – висоти паралелограма.

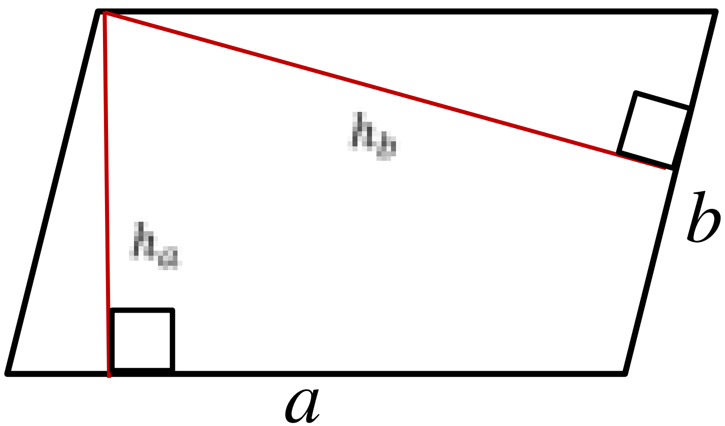
Властивості висот паралелограма

1. Якщо сусідні сторони паралелограма не рівні, то менша висота є відстанню між більшими сторонами, а більша висота – відстанню між меншими сторонами.

2. Висоти, опущені на паралельні сторони (або ж їх продовження) рівні.

Задача

Висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.



Розв`язання

Площа паралелограма

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$

З рівності двох добутків отримаємо пропорцію

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$